III.B Lemme de Morse

Lemme 26:

Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \bigcap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\begin{array}{ccc} V & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & M \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $A \in V$ on ait $A = {}^tMA_0M$.

Démonstration. Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMA_0M \end{array}$. Alors ψ est différentiable en I et

$$\mathrm{d}\psi_I.H = {}^tHA_0 + A_0H = {}^t(A_0H) + A_0H \in S_n(\mathbb{R}).$$

L'application $\mathrm{d}\psi_I$ est une application linéaire et $\mathrm{im}(\mathrm{d}\psi_I) \subset S_n(\mathbb{R})$.
Or son noyau est $\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in A_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}A_n(\mathbb{R})$, c'est un espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$. Donc, en vertu du théorème du rang son image est de dimension $n(n+1)/2 = \dim S_n(\mathbb{R})$, et donc $\mathrm{d}\psi(I)$ est surjective dans $S_n(\mathbb{R})$.

On pose alors $\chi = \psi_F$ la restriction de ψ à $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in S\}$ (c'est un supplémentaire du noyau dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Alors χ est injective sur son domaine de définition (par construction) et comme

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{d}\psi_I) \bigoplus F,$$

on obtient $\mathrm{d}\chi_I$ réalise une bijection de F sur $S_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\mathrm{d}\chi_I$ est inversible.

De plus, χ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) comme restriction d'une application de même régularité : en effet ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale en les coefficients de M.

Par théorème d'inversion locale, on a un voisinage U de I dans F (quitte à restreindre U, on le choisit inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui est un ouvert dense contenant I) tel que $\chi : U \to \chi(U) =: V$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \chi(U)$. De plus V est un voisinage de $\chi(I) = A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$

Ainsi pour tout A dans V, il existe un unique $M \in U$ (inversible) tel que $A = \chi(M) = {}^tMA_0M$ et $A \mapsto M$ est de classe $\mathcal{C}^1$. ■

Lemme 27: Lemme de Morse

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, c'est-à-dire $\mathrm{d}f(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral au premier ordre pour f, pour $x \in V_0$ voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + {}^txQ(x)x,$$

où

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2f(tx)\mathrm{d}t.$$

Alors on a en particulier $Q(0) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2f(0)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée.

Par le lemme précédent, on dispose donc de $M(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ en x telle que pour x voisin de 0, on ait :

$$Q(x) = {}^tM(xQ(0)M(x).$$

En posant $y = M(x)x$, il vient :

$$f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y.$$

Or la signature de $Q(0)$ est la même que celle de $\mathrm{d}^2f(0)$: $(p, n-p)$. Donc par changement de base (théorème d'inertie de Sylvester) on dispose de $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q(0) = {}^tA \begin{pmatrix} I_p & \\ & I_{n-p} \end{pmatrix} A.$$

Finalement, en posant $u = Ay$, on obtient la formule annoncée :

$$f(x) - f(0) = {}^t(Ay)Q(0)(Ay) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Il reste donc pour conclure à montrer que $\nu : x \mapsto u = AM(x)x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

On a que ν est de classe $\mathcal{C}^1$ car $x \mapsto M(x)$ l'est et que le produit de matrices et de vecteurs est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
De plus $\mathrm{d}\nu_0 : k \mapsto AM(0)k$, c'est-à-dire $\mathrm{d}\nu_0 = AM(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
Par théorème d'inversion locale, on obtient alors que ν réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de l'identité de $\mathbb{R}^n$. ■

Remarque 28

Ce théorème nous dit que pour une forme quadratique non dégénérée, les formes quadratiques assez proche lui sont équivalentes.